

Schüler-experimentieren 2010

Luca Mischendahl, Frederik Blank,
Steinbart-Gymnasium Duisburg:

Überlegungen zur dritten Aufgabe der 1. Runde des BWM 2009

Inhaltsverzeichnis:

- 1) Einleitung
- 2) Benutzte Schreibweisen und Lehrsätze
- 3) Die Aufgabe
- 4) Lösungsbeispiele aus dem BWM
- 5) Unterschiedliche Darstellungen eines Quaders
- 6) Unser Lösungsvorschlag
- 7) Ausbau zu einem Lehrsatz über perspektive Dreiecke
- 8) Interpretation im Raum
- 9) Zurück in die Ebene
- 10) Und noch einmal in den Raum
- 11) Rückblick und Ausblick
- 12) Quellenverzeichnis

1) Einleitung:

Unsere Arbeit beschäftigt sich mit der Geometrieaufgabe aus dem Bundeswettbewerb Mathematik 2009, 1. Runde. Wir geben drei der vier Musterlösungen an, die im Zusammenhang mit der zweiten Runde vorgestellt wurden.

Unsere eigene Lösung weicht von diesen Vorschlägen ab. Wir deuten die zweidimensionale Figur als Darstellung eines Quaders in Parallelprojektion. Der Schnittpunkt, dessen Existenz in der Aufgabe nachzuweisen war, erscheint in unserer Lösung als das Bild des Quadermittelpunkts bei Parallelprojektion.

Diesen Quadermittelpunkt gibt es natürlich auch bei anderen Darstellungen des Quaders, speziell auch, wenn man diesen in Fluchtpunktperspektive darstellt. Auf diesem Weg konnten wir zu jedem Paar von verschiedenen, zueinander perspektiv liegenden Dreiecken ein nicht-triviales Dreieck konstruieren, das zu beiden Ausgangsdreiecken perspektiv ist. „Nicht trivial“ soll hier bedeuten, dass seine Ecken nicht auf den Geraden (PA), (PB) oder (PC) liegen..

Die entsprechende Figur in der Ebene kann man wieder als Bild einer räumlichen Figur auffassen, die besondere Eigenschaften hat. Eine Deutung dieser Eigenschaften in der Ebene liefert eine Erweiterung zum Satz von Desargues. Anschließend geben wir einen Satz an, der eine Beziehung zwischen verschiedenen Längen angibt, die in der ebenen Figur auftreten. Dieser Satz scheint uns besonders interessant zu sein, wir können ihn aber nicht allgemein beweisen.

Anhand eines speziellen Beispiels beschäftigen wir uns abschließend mit der Frage, ob unsere Formel zu den Längenbeziehungen auch im Raum gelten könnte.

2) Benutzte Schreibweisen und Lehrsätze:

2.a) Vereinbarungen zur Schreibweise:

Punkte bezeichnen wir mit großen Buchstaben. (XY) bedeutet die von X und Y erzeugte Gerade, XY die entsprechende Strecke, $|XY|$ deren Länge. $\triangle ABC$ ist die Schreibweise für ein Dreieck. Damit übernehmen wir die Schreibweise des BWM. Den Schnittpunkt der Geraden (AB) und (CD) schreiben wir: $S=(AB)x(CD)$

2.b) Benutzte Lehrsätze:

Satz 2.b.1:

Die Seitenhalbierenden (Schwerelinien) eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S. Dieser Punkt heißt der Schwerpunkt des Dreiecks. Er unterteilt jede Seitenhalbierende im Längenverhältnis 2:1

Satz 2.b.2 (Satz von Pohlke):

Drei in verschiedenen Richtungen von einem Punkt ausgehende Strecken können stets als das durch Parallelprojektion erzeugte Bild eines Rechtwinkeldreiecks aufgefasst werden. [B1, S 180]

Satz 2.b.3:

Ein Viereck, in dem zwei gegenüber liegende Seiten parallel und gleich lang sind, ist ein Parallelogramm. (Beweis durch den Kongruenzsatz wsw)

Satz 2.b.4:

Ein Viereck, in dem sich die Diagonalen gegenseitig halbieren, ist ein Parallelogramm. (Beweis durch den Kongruenzsatz sws)

Satz 2.b.5:

Die Verkettung zweier zentrischer Streckungen ist eine zentrische Streckung, deren Streckfaktor das Produkt der beiden ursprünglichen Streckfaktoren ist, oder eine Parallelverschiebung.

Satz 2.b.6:

Eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor -1 ist eine Punktspiegelung.

Satz 2.b.7

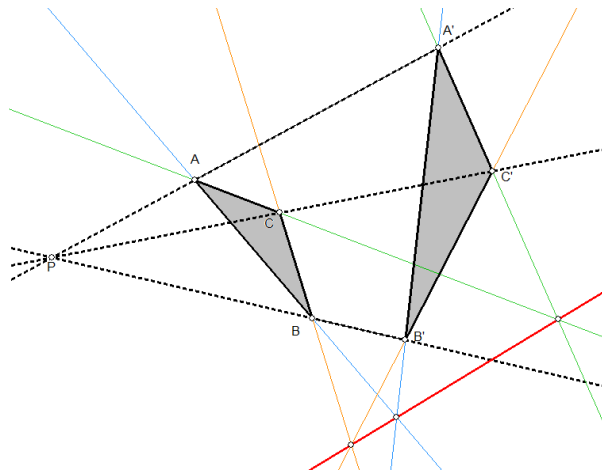
(Satz von Desargues):

Liegen zwei Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ zueinander perspektiv, so gilt:

Die Punkte

$(AB)x(A'B')$, $(BC)x(B'C')$ und $(CA)x(C'A')$

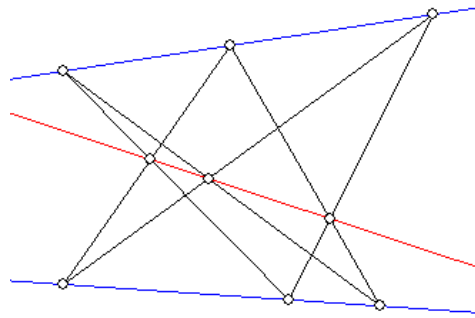
sind kollinear.



Satz 2.b.8

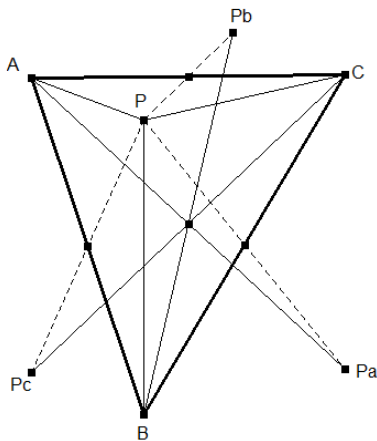
(Satz von Pappos):

Liegen die Eckpunkte eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so sind die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seiten kollinear.



3) Die Aufgabe:

Skizze 3.1



Folgende Aufgabe wurde als dritte Aufgabe in der ersten Runde des Bundeswettbewerbs Mathematik 2009 gestellt. Die Skizze links gehörte nicht zur Aufgabenstellung.

Ein Punkt P im Inneren des Dreiecks $\triangle ABC$ wird an den Mittelpunkten der Seiten BC , CA und AB gespiegelt, die Bildpunkte werden mit P_a , P_b bzw. P_c bezeichnet.

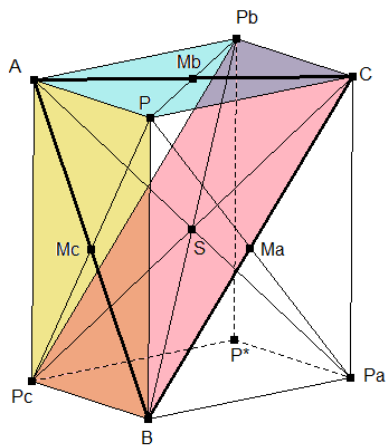
Beweise, dass sich die Geraden (AP_a) , (BP_b) und (CP_c) in einem gemeinsamen Punkt schneiden.

4) Lösungsbeispiele aus dem BWM:

Im Zusammenhang mit der Vorstellung der Aufgaben für die zweite Runde des BWM wurden vier verschiedene Lösungsmöglichkeiten vorgestellt. Dabei wurden die Mittelpunkte der Seiten AB , BC und CA mit M_c , M_a und M_b bezeichnet.

1. Beweis (mit Eigenschaften von Parallelogrammen): Über die Aufgabenstellung hinaus werden wir beweisen, dass die Mittelpunkte der angegebenen Strecken zusammenfallen.

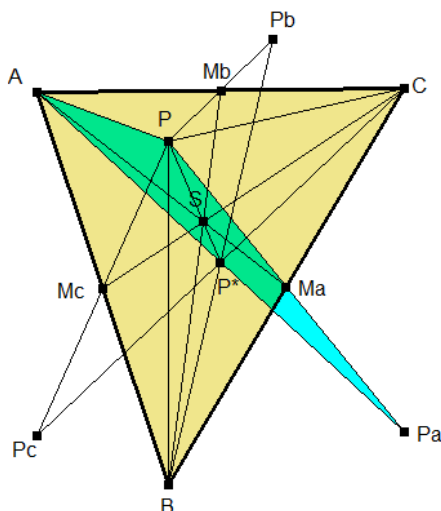
Skizze 4.1 zum 1. Beweis:



Der Mittelpunkt M_c der Seite AB halbiert nach Konstruktion sowohl die Strecke AB als auch die Strecke PP_c . Damit bilden die Punkte A, P_c, B und P ein Parallelogramm, d.h. die Strecken AP und BP_c sind gleich lang und parallel. (Da P im Innern des Dreiecks, also sicher nicht auf der Geraden (AB) liegt, ist das Parallelogramm nicht entartet.) Mit analoger Argumentation erhalten wir, dass AP und P_bC gleich lang und parallel sind. Insbesondere bilden die Strecken BP_c und CP_b ein Parallelogramm, d.h. die Diagonalen BP_b und CP_c halbieren sich. Ebenso bestimmen AP_c und CP_a ein Parallelogramm; d.h. der Mittelpunkt von CP_c ist auch Mittelpunkt von AP_a . Diese Aussage bleibt gültig, auch wenn dieses Parallelogramm entartet ist. Das war zu zeigen.

2. Beweis (Eigenschaften des Schwerpunktes in einem Dreieck):

Skizze 4.2 zum 2. Beweis:



Da M_a Mittelpunkt sowohl von BC als auch von PP_a ist, ist die Seitenhalbierende AM_a des Dreiecks $\triangle ABC$ auch Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle APP_a$. Der Punkt S auf AM_a , der AM_a im Verhältnis $2:1$ teilt, ist damit Schwerpunkt sowohl im Dreieck $\triangle ABC$ als auch im Dreieck $\triangle APP_a$. Da in jedem Dreieck der Schwerpunkt gemeinsamer Punkt aller Seitenhalbierenden ist, ist (PS) die Trägergerade der Seitenhalbierenden im Dreieck $\triangle APP_a$ von der Ecke P aus. Ihr Endpunkt, nämlich der Mittelpunkt der Seite AP_a , ist eindeutig bestimmt als derjenige Punkt P^* auf (PS) , der so auf (PS) liegt, dass S innerer Punkt der Strecke PP^* ist und PP^* im Verhältnis $2:1$ teilt.

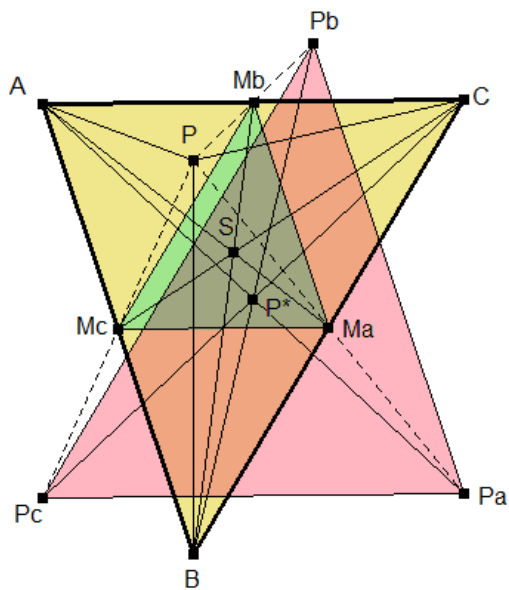
Diese Aussage gilt auch, wenn das Dreieck entartet ist, d.h. wenn P auf der Seitenhalbierenden AM_a liegt. •

Mit analoger Schlussweise erhält man, dass P^* auch Mittelpunkt der Strecken BP_b und CP_c ist; insbesondere ist P^* gemeinsamer Punkt von AP_a, BP_b und CP_c .

Der **3. Beweis** benutzt Vektorrechnung. Wir übergehen ihn daher.

4. Beweis:

Skizze 4.3 zum 4. Beweis:



Wir betrachten die zentrische Streckung $S_1(S; -0,5)$, wobei S der Schwerpunkt des Dreiecks ΔABC ist, und die zentrische Streckung $S_2(P; 2)$. Bekanntlich ist das Bild von Dreieck ΔABC bei der Streckung S_1 das Mittendreieck $\Delta M_aM_bM_c$; das Bild von Dreieck $\Delta M_aM_bM_c$ bei der Streckung S_2 ist nach Konstruktionsanweisung der Aufgabe das Dreieck $\Delta P_aP_bP_c$. Die Verkettung zweier zentrischer Streckungen ist wieder eine zentrische Streckung, deren Streckfaktor das Produkt der beiden Streckfaktoren ist, oder eine Parallelverschiebung. Hier ist der Streckfaktor $-0,5 \cdot 2 = -1$; daraus lesen wir ab, dass die Verkettung der beiden zentrischen Streckungen eine Punktspiegelung ist; sie fñhrt das Dreieck ΔABC in das Dreieck $\Delta P_aP_bP_c$ über.

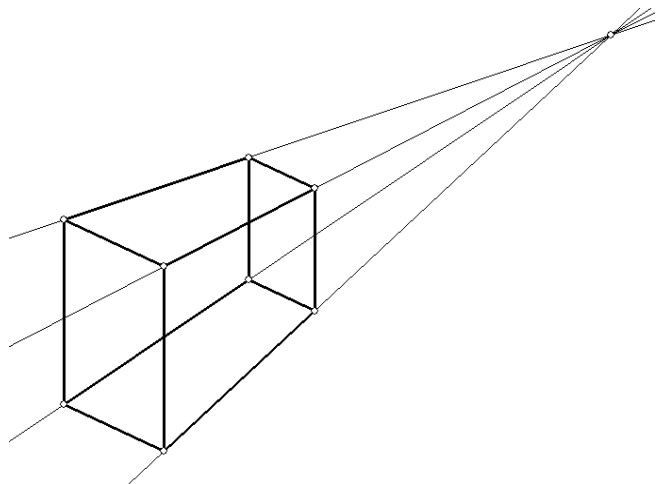
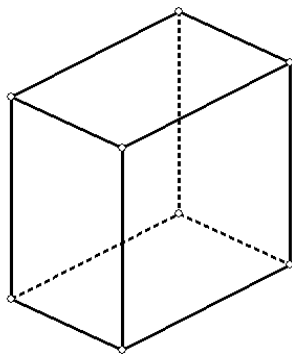
Insbesondere ist das Streckzentrum der Mittelpunkt aller Verbindungsstrecken von Urbild- und Bildpunkten, insbesondere von AP_a , BP_b und CP_c .

Bevor wir unseren eigenen Lösungsvorschlag präsentieren, stellen wir zunächst die Darstellung eines Quaders mit unterschiedlichen Perspektivarten vor.

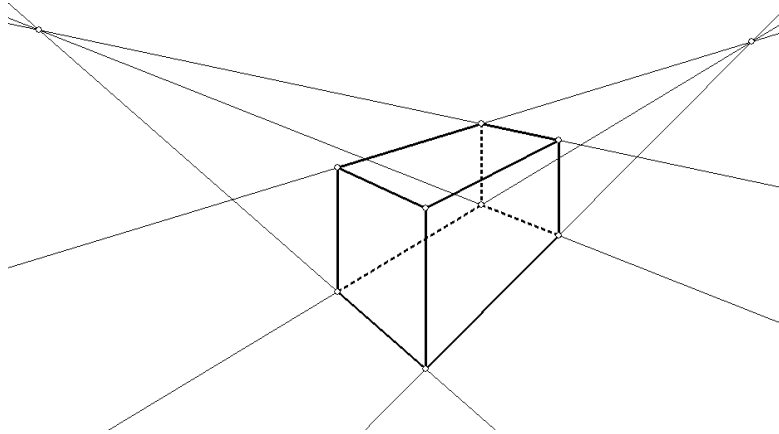
5) Unterschiedliche Darstellungen eines Quaders:

Skizze 5.1: Quader in Parallelperspektive

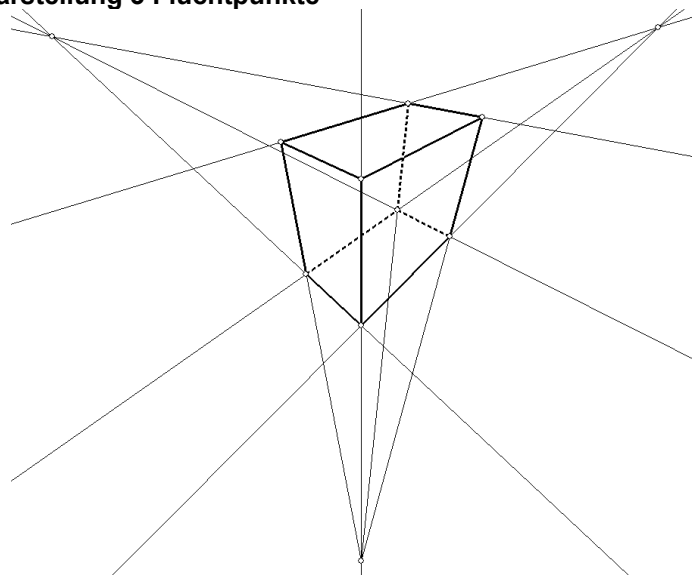
Skizze 5.2: Quaderdarstellung 1 Fluchtpunkt



Skizze 5.3: Quaderdarstellung 2 Fluchtpunkte

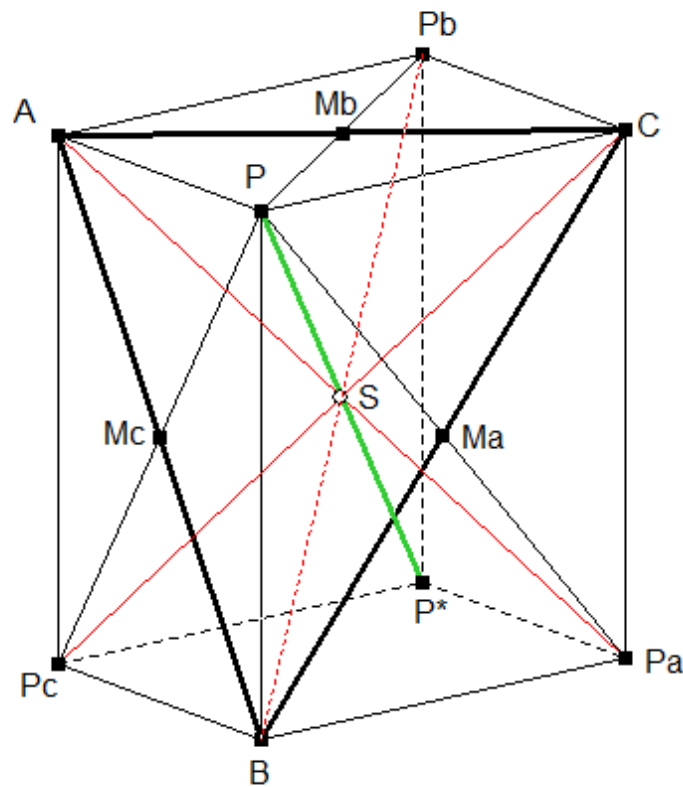


Skizze 5.4: Quaderdarstellung 3 Fluchtpunkte



6) Unser Lösungsvorschlag:

Skizze 6.1:



Wir ergänzen die Figur aus Skizze 3.1 um die nebenstehend in der Skizze 6.1 eingezeichneten Hilfslinien. Jetzt können wir die Figur nach Satz 2.b.2 auffassen als Schrägbild eines Quaders in Parallelprojektion mit den sichtbaren Ecken A, B, C, P_a, P_b, P_c und P sowie der nicht sichtbaren Ecke P^* .

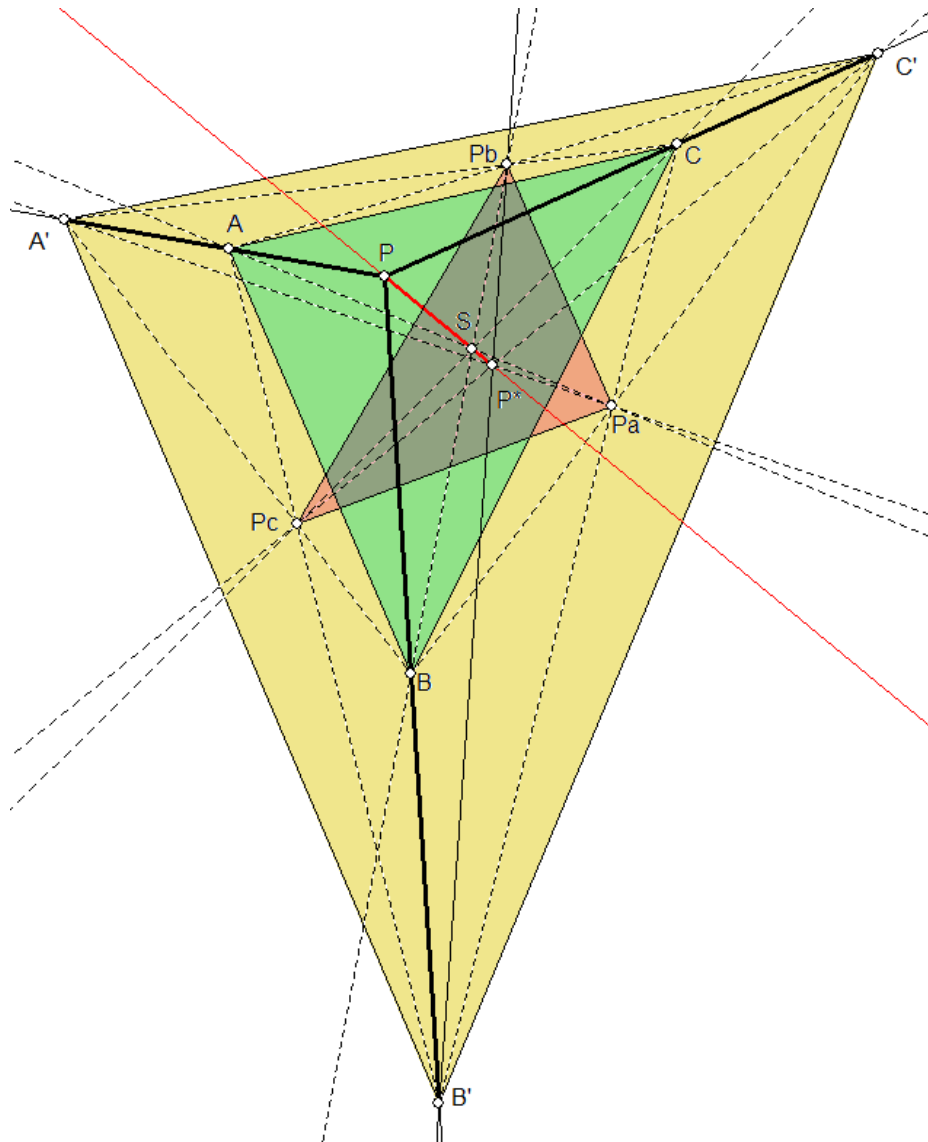
In einem Quader schneiden sich die Raumdiagonalen in einem Punkt. Dieser Schnittpunkt bleibt bei der Projektion in die Ebene erhalten. Sein Bild ist offenbar der gesuchte Punkt S , denn AP_a, BP_b und CP_c sind ja die Bilder der Raumdiagonalen. Dabei ist klar, dass P, S und P^* auf dem Bild der vierten Quaderdiagonalen liegen.

7) Ausbau zu einem Lehrsatz über perspektive Dreiecke:

Im Kapitel 6 haben wir unseren Quader in Parallelperspektive gezeichnet. Es gibt aber auch andere perspektivische Darstellungen räumlicher Figuren. So lernt man etwa im Kunstunterricht, dass eine Darstellung mit Fluchtpunkten dem tatsächlichen Augenschein eher entspricht (vergleiche hierzu Abschnitt 5.).

Wir stellen unseren Quader perspektivisch mit drei Fluchtpunkten dar. Dadurch haben wir neben dem Ausgangsdreieck ΔABC und dem dazu perspektiv liegenden $\Delta P_a P_b P_c$ noch das Dreieck $\Delta A'B'C'$ aus den Fluchtpunkten. Hieraus ergibt sich eine Reihe interessanter Sachverhalte, die nun dargestellt werden sollen.

Skizze 7.1:



Alle räumlichen Parallelen des Quaders zur Geraden (PA) verlaufen in der Projektion durch den Fluchtpunkt A' , die zu (PB) durch B' und die zu (PC) durch C' . Die Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ sind in unserer Zeichnung perspektiv bezüglich P . Das Dreieck $\Delta P_aP_bP_c$ liegt nach Konstruktion bezüglich P^* perspektiv zu $\Delta A'B'C'$ und wegen des schon in Kapitel 6 benutzten Argumentes mit dem Schnitt S der Raumdiagonalen auch perspektiv zu ΔABC . Wir haben also drei paarweise perspektiv liegende Dreiecke. Wegen des Satzes 2.b.2 kann man unsere Argumentation für jedes perspektiv liegende Dreieckspaar ΔABC und $\Delta A'B'C'$ benutzen. Also gilt:

Satz 7.1:

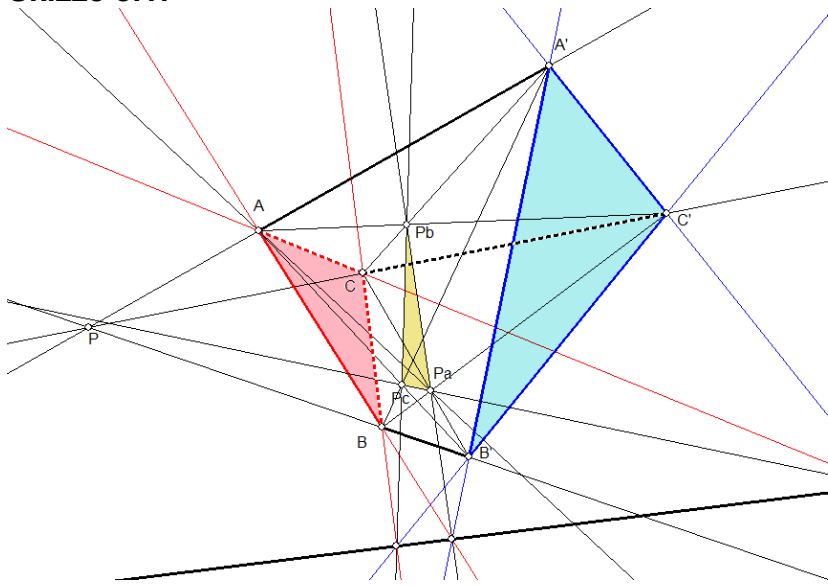
Liegen zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ mit verschiedenen Ecken perspektiv, so ist das Dreieck mit den Ecken $P_c=(BA') \times (AB')$, $P_a=(CB') \times (BC')$ und $P_b=(AC') \times (CA')$ perspektiv zu beiden.

Die drei Perspektivitätszentren (in der Skizze die Punkte P , S und P^*) liegen auf einer Geraden. (Diese in der Skizze rot eingezeichnete Gerade ist offenbar das Bild der vierten Raumdiagonalen unseres Hilfsquaders.)

Einen entsprechenden Satz für Figuren mit mehr als drei Ecken scheint es wohl nicht zu geben.

8) Interpretation im Raum:

Skizze 8.1:



Die links angegebene Skizze zu den Dreiecken ΔABC , $\Delta A'B'C'$ und $\Delta P_aP_bP_c$ kann man deuten als Bild eines schiefen Pyramidenstumpfes mit ΔABC als Deckel, mit Boden $\Delta A'B'C'$ und den Punkten P_a , P_b und P_c als den Schnittpunkten der Diagonalen der drei Mantelflächen.

Unser Betreuungslehrer hat uns ein Modell eines derartigen Pyramidenstumpfes gebaut, das wir zur Präsentation mitbringen werden. Die Perspektivitätszentren P^* und S erscheinen auch hier. Und auch im Raum sind P , P^* und S kollinear.

Der Sachverhalt gilt auch, wenn das Perspektivitätszentrum P ins Unendliche wandert. Dann wird aus dem Pyramidenstumpf ein schräges Prisma. Die Perspektivitätszentren P und P^* erscheinen hier ebenfalls. Die Gerade (P, P^*) verläuft nun parallel zu den Kanten des Prismas, die Deckel und Boden miteinander verbinden.

Wir bleiben noch bei dem räumlichen Modell.

Die Ebenen E_{ABC} und $E_{A'B'C'}$ schneiden sich (falls sie nicht parallel sind) in einer Geraden g . Von einem beliebigen Punkt X auf g erscheinen sowohl A, B, C kollinear als auch A', B', C' . Nach dem Satz von Pappos müssen dann auch P_a, P_b und P_c von X aus als kollinear erscheinen. Die Gerade g liegt also auch ganz in der von P_a, P_b, P_c erzeugten Ebene. Die Ebenen E_{ABC} , $E_{A'B'C'}$ und $E_{P_aP_bP_c}$ schneiden sich demnach alle drei in der gemeinsamen Geraden g . Wir haben so eine Erweiterung der räumlichen Desargues-Figur um eine weitere Ebene:

Satz 8.1:

Liegen zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ zueinander perspektiv im Raum und schneiden sich die beiden Dreiecksebenen in einer Geraden g , so gilt:

Die von den Punkten $(AB') \times (A'B)$, $(BC') \times (B'C)$ und $(CA') \times (C'A)$ erzeugte Ebene verläuft ebenfalls durch g .

Auch hierzu bringen wir zur Präsentation ein Modell mit.

9) Zurück in die Ebene:

Die Projektion unserer Figur in die Ebene liefert eine Erweiterung zum ebenen Satz von Desargues (vergleiche Skizze 8.1)

Satz 9.1:

Liegen zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ zueinander perspektiv, so gilt bei bekannter Definition der Punkte P_a , P_b und P_c :

Die Geraden (AB) , $(A'B')$ und (P_aP_b) haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Die Geraden (BC) , $(B'C')$ und (P_bP_c) haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Die Geraden (CA) , $(C'A')$ und (P_cP_a) haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Die drei Schnittpunkte liegen auf einer Geraden.

In der Skizze 8.1 findet man so weitere Gruppierungen von kollinearen Schnittpunkten:

Satz 9.2: $(A'B') \times (P_bP_c)$, $(BC) \times (A'C')$ und $(AC') \times (B'C)$ liegen auf einer Geraden.

Satz 9.3: $(B'C') \times (P_cP_a)$, $(CA) \times (B'A')$ und $(BA') \times (C'A)$ sind kollinear.

Satz 9.4: $(C'A') \times (P_aP_b)$, $(AB) \times (C'B')$ und $(CB') \times (A'B)$ sind kollinear.

Die drei Geraden haben einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Satz 9.5: $(AB) \times (P_bP_c)$, $(B'C') \times (AC)$ und $(A'C) \times (BC')$ liegen auf einer Geraden.

Satz 9.6: $(BC) \times (P_cP_a)$, $(C'A') \times (BA)$ und $(B'A) \times (CA')$ liegen auf einer Geraden.

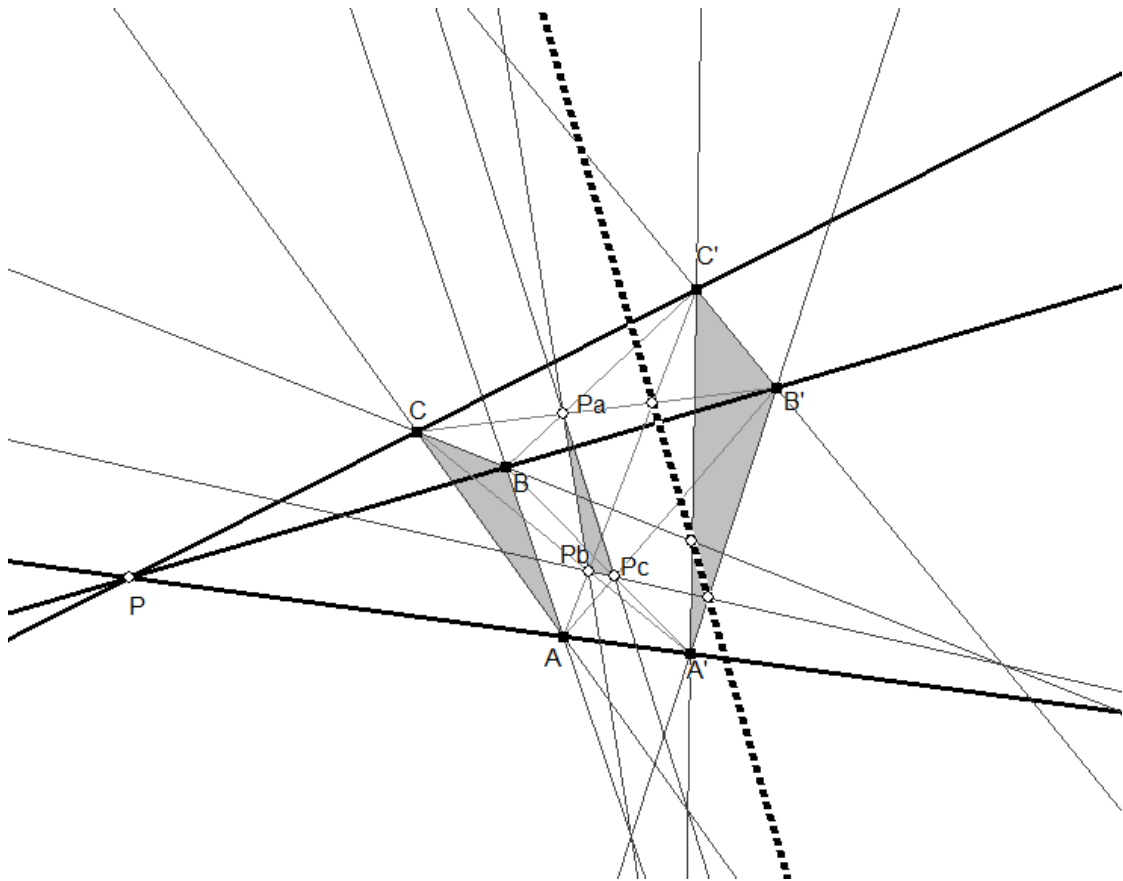
Satz 9.7: $(CA) \times (P_aP_b)$, $(A'B') \times (CB)$ und $(C'B') \times (AB')$ liegen auf einer Geraden.

Die drei Geraden haben ebenfalls einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Dabei gehen die Sätze 9.2 bis 9.4 durch zyklische Vertauschung der Buchstaben auseinander hervor. In 9.5 bis 9.7 haben die gestrichenen und die ungestrichenen Buchstaben ihre Plätze getauscht.

Es reicht also, wenn wir hier nur eine Skizze angeben. Wir wählen dazu Satz 9.2:

Skizze 9.1:



Wir knüpfen noch einmal an den Satz 7.1 an. Dort wurde festgehalten, dass die Perspektivitätszentren P , S und P^* kollinear sind. Der folgende von uns entdeckte Lehrsatz beschäftigt sich mit dem Verhältnis ihrer Abstände. Wir betrachten dazu noch einmal die Skizze 7.1

Satz 9.8:

Liegen zwei Dreiecke ΔABC und $\Delta A'B'C'$ zueinander perspektiv, so gilt bei bekannter Definition der Punkte P_a , P_b , P_c , P , S , P^* (vergleich Skizze 7.1):
 $|SP|/|SP^*| = 1 + |AP|/|AA'| + |BP|/|BB'| + |CP|/|CC'|$

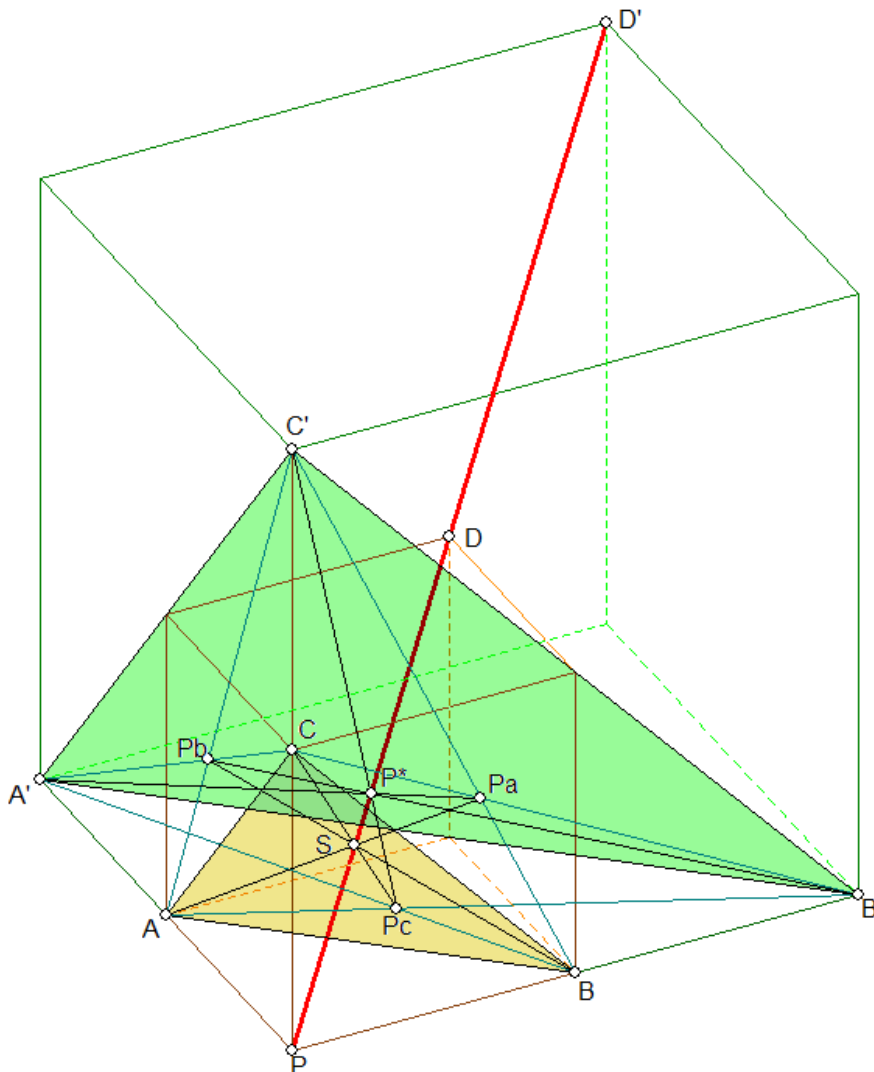
Wir können diesen Lehrsatz leider nicht beweisen. Wir haben ihn durch den Einsatz von Cabri géomètre gefunden und können ihn beim Wettbewerb „vorführen“.

10) Und noch einmal in den Raum:

Gilt die in Satz 9.3 angegebene Formel auch im Raum? Eigentlich können wir das nicht sagen, denn wir können ja noch nicht einmal den „ebenen“ Satz beweisen. Aber wir können es an einem ganz einfachen Beispiel ausprobieren. Dazu wählen wir einen Einheitswürfel, den wir in Länge, Breite und Höhe verdoppeln. Für uns wichtige Punkte sind:

$P(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;1;1)$,
 $A'(2;0;0)$, $B'(0;2;0)$, $C'(0;0;2)$, $D'(2;2;2)$

Skizze 10.1:

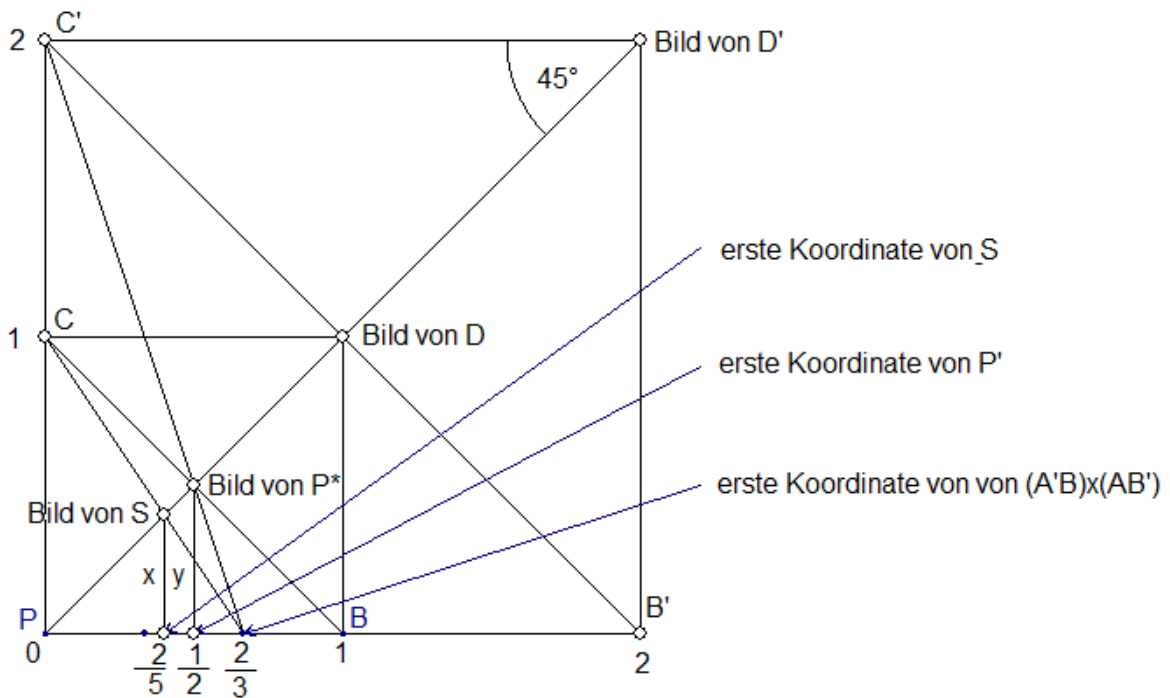


(AB') und $(A'B)$ sind dann Seitenhalbierende im Dreieck $\triangle A'B'P$. Ihr Schnittpunkt teilt sie im Längenverhältnis 2:1. Der Schnittpunkt ist also $P_c(2/3; 2/3; 0)$.

Entsprechend haben wir $P_a(0; 2/3; 2/3)$ und $P_b(2/3; 0; 2/3)$.

Jetzt wollen wir die Punkte S und P^* bestimmen. Wegen der völligen Symmetrie unserer beiden Ausgangswürfel müssen diese Punkte auf der Raumdiagonalen (PD') liegen. Wir brauchen für die Ermittlung von S und P^* also nur die Geraden (CP_c) bzw. $(C'P_c)$ mit dieser Raumdiagonalen zum Schnitt zu bringen. Da alle Koordinaten von S und auch von P^* jeweils gleich sind, genügt uns hierbei eine einzige Koordinate. Die senkrechte Parallelprojektion in die von P , B und C erzeugte Seitenebene ergibt folgendes Bild:

Skizze 10.2:



Wie man sieht, ist $x=2/5$ und $y=1/2$.

Es ist also $S(2/5 ; 2/5 ; 2/5)$ und $P^*(1/2 ; 1/2 ; 1/2)$

Wir kontrollieren die Formel aus Satz 9.3:

Linke Seite der Formel: $|PS| : |P^*S| = (2/5) / (1/2 - 2/5) = 4$

Rechte Seite der Formel: $1 + |PA|/|AA'| + |PB|/|BB'| + |PC|/|CC'| = 1 + 1/1 + 1/1 + 1/1 = 4$

Das Ergebnis spricht nicht gegen die Gültigkeit unserer Formel im Raum.

11) Rückblick und Ausblick:

Die Kernidee dieser Arbeit ist es, dass wir ein Problem aus der ebenen Geometrie leichter lösen konnten, weil wir die zu betrachtende Figur als Projektion einer räumlichen Figur interpretiert haben. Zwischen ebener und räumlicher Interpretation der betrachteten Figuren haben wir in unserer Arbeit mehrfach gewechselt. Wir haben bemerkt, dass ein solcher Wechsel zwischen den Dimensionen manchmal vorteilhaft sein kann.

Es ist schade, dass wir Satz 9.3 nicht beweisen konnten. Unser Beratungslehrer vermutet, dass man dazu mindestens Winkelfunktionen benötigt, und die kennen wir noch nicht. Im 10. Kapitel konnten wir mit einem Spezialfall erläutern, dass der Satz 9.3 auch im Raum Gültigkeit haben könnte.

Dabei hat sich noch eine Besonderheit ergeben. Es ist gemäß Skizze 10.1:

$|PD'| : |PD'| = 1 : 1$; $|SD'| : |PD'| = 4 : 5$; $|P'D'| : |PD'| = 3 : 4$; $|DD'| : |PD'| = 1 : 2$;

Mit diesen Werten hat uns unser Beratungslehrer zu einem Musiklehrer geschickt.

Der konnte mit diesen Zahlen tatsächlich etwas anfangen. Wenn man Klangstäbe (oder Saiten) mit diesen Längenverhältnissen zum Schwingen bringt, dann ergeben sich Prime, große Terz, Quart und Oktave. Wir werden das am Präsentationsstand vorführen.

Es war für uns sehr verblüffend, dass unsere geometrische Konstruktion etwas mit Musiktheorie zu tun hat. Das wäre wohl weiterer Untersuchungen wert, ebenso wie der allgemeine Beweis von Satz 9.3 sowie die Frage nach seiner Gültigkeit im Raum.

Wir möchten uns bei unserem Betreuungslehrer bedanken für seine Beratung und für den Bau der Modelle, die wir zur Präsentation mitbringen.

12) Quellennachweis

B1) Reidt – Wolff – Athen: Elemente der Mathematik, Oberstufe 4,
Schroedel - Schöningh, Hannover - Paderborn 1972

Bundeswettbewerb Mathematik 2009, Aufgaben der ersten Runde

Bogen mit Lösungsbeispielen zu den Aufgaben der ersten Runde